**Введение**

Омни-колесо -- это колесо особой конструкции, способное двигаться вдоль опорной поверхности не только за счет вращения вокруг собственной оси в направлении, лежащем в плоскости колеса, но и в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Таким свойством оно обладает благодаря роликам, располагаемым вдоль колеса. Оси роликов касаются средней плоскости колеса, и ролики свободно вращаются вокруг своих осей. Используется и другой вариант конструкции (*mecanum wheels*), в котором оси роликов составляют с плоскостью колеса некоторый фиксированный угол, как правило, . Экипаж с омни-колесами способен двигаться в произвольном направлении, не поворачиваясь вокруг вертикали, и не поворачивая вокруг вертикали колеса, то есть обладает повышенной маневренностью.

Исследования динамики экипажей с омни-колесами обычно следуют одному из двух подходов: либо не учитывается динамика роликов, и колеса моделируются как диски, способные скользить в заданном направлении \cite{ZobovaTatarinovPMM, formalskii, borisov, ZobovaTatarinovAspecty2006, zobova2008svobodnye8020851, Martynenko2010}, либо применяются формализмы для построения компьютерных моделей систем тел \cite{KosenkoGerasimov, Tobolar, Williams2002, Ashmore2002}. В первом случае не учитываются эффекты, связанные с собственным вращением роликов, а во втором невозможен непосредственный анализ уравнений движения системы. Уравнения движения симметричного экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом динамики роликов получены в \cite{ZobovaGerasimovPMM}. При рассмотрении динамики роликов отдельного внимания заслуживает момент перехода колеса с одного ролика на другой, поскольку вращение ролика, входящего в контакт, может не быть согласовано с условием отсутствия скольжения в контакте.

В данной работе проведено детальное рассмотрение момента смены ролика в контакте с учетом ударного характера взаимодействия с опорной плоскостью. Также, получены численные решения, состоящие из участков, определяемых уравнениями движения, и моментов смены контакта, моделируемых с точки зрения теории удара.

**Постановка задачи**

\begin{figure}[h]

\minipage{0.4\textwidth}

\centering

\asyinclude{./asy/pic\_cart.asy}

\caption{Экипаж}

\label{fig:vehicle}

\endminipage

\minipage{0.3\textwidth}

\centering

\asyinclude{./asy/pic\_wheel.asy}

\caption{Колесо}

\label{fig:wheel}

\endminipage

\minipage{0.3\textwidth}

\centering

\asyinclude{./asy/pic\_overlap.asy}

\caption{Перекрытие}

\label{fig:overlap}

\endminipage

\end{figure}

Экипаж с омни-колесами как система абсолютно твердых тел включает платформу, омни-колес, оси которых горизонтальны и фиксированы относительно платформы, и массивных роликов на каждом колесе, то есть система состоит из  тел. Будем рассматривать конфигурации экипажа, в которых оси колес коллинеарны векторам , соединяющим центр масс платформы  и центры колес  (фиг.~\ref{fig:vehicle}), причем  расположены в вершинах правильного многоугольника так что . Оси роликов лежат в плоскости колеса на касательных к его окружности (фиг.~\ref{fig:wheel}). Трения в осях роликов и колес нет.

Обозначим углы между радиус-вектором и радиус-векторами  центров колес  (при этом ).

В таких конфигурациях центр платформы  является и центром масс всей системы (и потому ).

Рассмотрим движение экипажа по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Неподвижную систему отсчета выберем, направив ось  вверх, и введя оси  и  на опорной плоскости.

Также жестко свяжем с платформой экипажа подвижную систему отсчета  так, чтобы горизонтальная плоскость  содержала центры колес .

Введем обобщенные координаты:

 -- координаты точки на плоскости ,  -- угол между осями  и  (угол курса),

 () -- углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора , и  -- углы поворота роликов вокруг их собственных осей.

Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид



где сначала указаны углы поворота  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, a затем -- остальных, ``cвободных'', роликов. Индекс  используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса  и ролика на колесе . по формуле

 \label{eq:num}

Введем псевдоскорости



где ,  --- проекции скорости центра масс системы  на оси . и , связанные с платформой,  --- угловая скорость платформы (с точностью до множителя),  --- скорости собственного вращения свободных роликов. Всего независимых псевдоскоростей . Таким образом, имеем

.

Поскольку опорная плоскость абсолютно шероховата, скольжения в контакте роликов не происходит, т.е.

скорости точек контакта  равны нулю:

 \label{eq:constraints\_vec}

что в обобщенных координатах и псевдоскоростях имеет вид:

 \label{constraint\_roller\_contact}

 \label{constraint\_wheel\_contact}

Таким образом, на систему наложены линейные дифференциальные связи:

\label{constraints\_V}

\begin{equation}

$\dot{\vec{q}} = \cstr\vnu,\quad \cstr = \cstr(\theta,\chi\_i) = \begin{bmatrix}

\widetilde{\cstr} & \O\_1 \\

\O\_2 & \E \\

\end{bmatrix},$

\quad

\widetilde{\cstr} = \begin{bmatrix}

R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\[6pt]

R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\[6pt]

0 & 0 & \ddfrac{1}{\Lambda} \\[6pt]

\ddfrac{R}{l}\sin\alpha\_i & -\ddfrac{R}{l}\cos\alpha\_i & -\ddfrac{R}{\Lambda l} \\[6pt]

\ddfrac{R}{\rho\_k}\cos\alpha\_k & \ddfrac{R}{\rho\_k}\sin\alpha\_k & 0 \\[6pt]

\end{bmatrix}

\end{equation}

Здесь $\O\_1$ и $\O\_2$ -- нулевые $(3+2n \times N(n-1))$- и $(N(n-1) \times 3)$-матрицы, $\E$ -- единичная матрица размерности $N(n-1)$.

Уравнения движения получим методом Я.В.~Татаринова для систем с дифференциальными связями (см. работы \cite{Tatarinov,Zobova2011}). Для получения замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к уравнениям движения добавим уравнения связей на $\dot{\chi}\_i$. Подробный вывод уравнений движения для рассматриваемой модели экипажа, анализ структуры уравнений и моделирование участков движения без смены роликов в контакте см. в \cite{ZobovaGerasimovPMM}.

Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\vnu^\mathrm{T}\M^\*(\chi\_i)\vnu = h = \mathrm{const}$ и первые интегралы:

\begin{equation}

\label{int\_free\_roller}

\nu\_s + \ddfrac{1}{\Lambda}\sin\chi\_{ij}\nu\_3 = \const

\end{equation}

связывающие скорость вращения платформы $\nu\_3$ со скоростями собственного вращения свободных роликов (здесь $\chi\_{ij}$ -- угол между опорной плоскостью $OXY$ и радиус-вектором центра $j$-го ролика на $i$-том колесе относительно центра колеса $P\_i$).

В тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется, динамика системы описывается уравнениями движения системы (см. \cite{ZobovaGerasimovPMM}). Смена контакта на $i$-том колесе происходит при значении угла $\chi\_i = \ddfrac{2\pi}{n}$. При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений $\rho\_i = l\cos\chi\_i-r$ в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта, снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину, а значит, концы роликов усекаются. При этом ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкая сторона хотя бы одного ролика была в контакте с плоскостью. В данной работе рассматриваются усеченные ролики (см. фиг.~\ref{fig:overlap}), но их оси расположены в одной плоскости, и допускается пересечение тел роликов в пространстве. Ось ролика находится на расстоянии $r = l\cos\ddfrac{\pi}{n-1}$ от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса $l$ с углом раствора $\ddfrac{2\pi}{n}$.

\section{Наложение связи при смене ролика в контакте}

\begin{figure}[h]

\minipage{0.5\textwidth}

\centering

\asyinclude{./asy/pic\_react}

\caption{Реакции}

\label{fig:react}

\endminipage

\minipage{0.5\textwidth}

\centering

\asyinclude{./asy/pic\_project}

\caption{Проекция}

\label{fig:project}

\endminipage

\end{figure}

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной работе будем считать, что трение достаточно велико, и прекращение проскальзывания вновь вошедшего в контакт ролика происходит мгновенно. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном наложении связи.

Освободившийся ролик начинает свободно вращаться вокруг своей оси.

Будем предполагать следующее:

\begin{itemize}

\item удар происходит за бесконечно малый интервал времени $\Delta t << 1$, так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы $\Delta \q \sim \dotq\Delta t << 1$, а изменения обобщенных скоростей конечны $\Delta \dotq < \infty$;

\item взаимодействие экипажа с опорной полоскостью во время удара сводится к действию в точках контакта нормальных и касательных реакций $\mathbf{R}\_i = \mathbf{N}\_i + \mathbf{F}\_i$, где индекс $i$ равен номеру колеса;

\item к моменту окончания удара $t^\*+\Delta t$ уравнения связей выполнены $\dqposle = \cstr(\q)\nuposle$, т.е. за время $\Delta t$ проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

\end{itemize}

Исходя из этих предположений, в следующих разделах получим системы алгебраических уравнений, связывающих значения обобщенных скоростей непосредственно перед ударом $\dqdo$ и значения псевдоскоростей сразу после удара $\nuposle$ двумя разными способами: в первом случае, будем вводить ударные реакции, действующие в точках контакта, а во втором, будем рассматривать неупругий удар как проецирование вектора обобщенных скоростей на плоскость, задаваемую уравнениями вновь налагаемых связей.

Таким образом, моделирование системы состоит в решении задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений в интервалах между моментами смены роликов в контактах и решения систем алгебраических уравнений в эти моменты для получения начальных условий для следующего безударного интервала.

\subsection{Основное уравнение теории удара}\label{sect:impact\_classical}

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно малого времени $\Delta t$ наложены только геометрические связи, так что скорости $\dot{\mathbf{q}}$ независимы. Запишем уравнение удара в обобщенных координатах \cite{Vilke}:

\begin{equation}\label{eq:udar\_general}

\eqDeltaqQ,

\end{equation}

где $\mke$ -- матрица кинетической энергии без учета связей (так что $\M^\* = \cstr^T \mke \cstr$), а $\Q$ -- вектор импульсов ударных реакций в обобщенных координатах:

\begin{equation\*}

\eqQ

\end{equation\*}

Исходя из геометрии системы (см. фиг.~\ref{fig:react}), получаем, что компоненты этого вектора связаны с касательными составляющими ударных реакций следующим образом (верхний индекс в $F\_i^\cdot$ означает проекцию на соответствующую ось неподвижной системы отсчета):

\begin{eqnarray\*}

\eqQiOne \\

\eqQiTwo \\

\eqQiTheta \\

\eqQChii \\

\eqQPhii \\

\eqQs

\end{eqnarray\*}

В матричном виде:

\begin{equation\*}

\eqQKF

\end{equation\*}

\begin{equation\*}

\mK = \K

\end{equation\*}

Размерность матрицы $\mK$ равна $(3 + N(n+1)) \times 2N$, её ранг максимален и равен $(3 + N(n+1))$, что можно показать непосредственным вычислением.

Непосредственно перед ударом связи, запрещающие проскальзывание роликов, выходящих из контакта, снимаются.

К моменту окончания удара аналогичные связи налагаются на вновь входящие в контакт ролики.

\begin{equation\*}

\eqqnu

\end{equation\*}

Отсюда уравнение \upr{eq:udar\_general} принимает вид:

\begin{equation}\label{eq:udar\_mat}

\eqMVnuKF

\end{equation}

В следющем пункте будет доказано, что полученная линейная система алгебраических уравнений относительно $\nuposle$ и $\F$ допускает единственное решение.

%

\subsection{Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей}

Покажем существование и единственность решения уравнения\upr{eq:udar\_mat} в более общем виде.

Рассмотрим натуральную систему с обобщенными координатами $\q$ и кинетической энергией $T = \ddfrac{1}{2}(\mke\dotq, \dotq)$, на которую в момент времени $t^\*$ мгновенно налагаются дифференциальные связи вида $\A\dotq = 0$.

При этом верно основное уравнение удара\upr{eq:udar\_general}.

Будем считать также, что выполнено условие идеальности связей:

\begin{equation}\label{eq:constraints\_ideal}

\Q^T \delta\qposle = 0,

\end{equation}

где $\delta\qposle$ -- виртуальные перемещения системы после наложения связей.

Обобщенные скорости системы после наложения связей $\dqposle$ находятся в линейном подпространстве $\subspace = \ker \A$ пространства виртуальных перемещений $T\_\q\M$.

В этом подпространстве можно выбрать базис, и таким образом ввести псевдоскорости на интервале после наложения связей: $\dqposle = \cstr\nuposle$, где столбцы матрицы $\cstr$ есть векторы базиса в $\subspace$.

При этом для матрицы оператора $\A$ и матрицы $\cstr$ будет выполнено:

\begin{equation}\label{eq:constraints\_orth}

\A\cstr = 0.

\end{equation}

Условие идеальности связей\upr{eq:constraints\_ideal} означает, в частности, что вектор импульса ударных реакций $\Q$ лежит в подпространстве $T\_\q\M$, дополнительном к $\subspace = \ker \A$, и таким образом, по лемме о множителях Лагранжа \cite{KarapetyanKugushev} представляется в базисе, составленном из строк матрицы $\A$: $\Q = \A^T\lagr$, где $\lagr$ -- множители Лагранжа.

Уравнение удара\upr{eq:udar\_general} тогда можно представить в виде:

\begin{equation}\label{eq:udar\_mat\_At}

\mke\cstr\nuposle - \A^T\lagr = \mke\dqdo,

\end{equation}

где вместо матрицы $\mK$, приведенной в разделе~\ref{sect:impact\_classical}, стоит любая матрица оператора связей~$\A$.

Равенство\upr{eq:udar\_mat\_At} есть система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $(\nuposle, \lagr)^T$. Матрица $(\mke\cstr; -\A^T)$ этой системы -- квадратная размерности~$\dim~\q~\times~\dim~\q$, поскольку столбцы $\cstr$ и $\A^T$ образуют базисы в дополнительных подпространствах $T\_\q\M = \mathbb{R}^{\dim \q}$. Невырожденна она по той же причине, доказательство чего носит технический характер и проведено в Приложении. Таким образом, задача теории удара в рассматриваемом случае всегда имеет решение, решение единственно и доставляет одновременно значения обобщенных скоростей после удара $\dqposle = \cstr\nuposle$ и импульсов ударных реакций~$\Q = \A^T\lagr$.

Отметим также, в силу основного уравнения удара\upr{eq:udar\_general} и условия идеальности\upr{eq:constraints\_ideal}, мгновенное наложение связей можно рассматривать как абсолютно неупругий удар при котором теряется компонента $\deltadq$ вектора обобщенных скоростей $\dqdo$, ортогональная подпространству $\subspace$ в кинетической метрике:

\begin{equation\*}

\deltadq^T\mke\delta\q = 0.

\end{equation\*}

Тогда вектор обобщенных скоростей после удара $\subspace \ni \dqposle = \dqdo - \deltadq$ вычисляется непосредственно как проекция вектора $\dqdo$ на подпространство $\subspace$, минуя получение импульсов ударных реакций $\Q$. Явный вид матрицы $\A$ также не требуется, достаточно ввести псевдоскорости: $\dqposle = \cstr\nuposle$.

Выражение для $\nuposle$ тогда может быть получено следующим образом:

\begin{equation\*}

0 = \cstr^T\Q = \cstr^T\mke\deltadq = \cstr^T\mke(\cstr\nuposle - \dqdo) = \cstr^T\mke\cstr\nuposle - \cstr^T\mke\dqdo,

\end{equation\*}

откуда:

\begin{equation\*}

\eqnuposleproj.

\end{equation\*}

Эту же формулу можно получить и из уравнения\upr{eq:udar\_mat\_At}, домножая его слева на $\cstr^T$ и пользуясь равенством\upr{eq:constraints\_orth}. Симметрично, при умножении\upr{eq:udar\_mat\_At} слева на $\A\mke^{-1}$, имеем выражение для множителей Лагранжа $\lagr$:

\begin{equation\*}

\lagr = -(\A \mke \A^T)^{-1}\A\dqdo,

\end{equation\*}

не включающее явно матрицу связей $\cstr$.

Возвращаясь к рассмотрению экипажа с омни-колесами, покажем связь матрицы $\mK$ и вектора ударных реакций $\F$ с изложенными общими утверждениями.

Рассмотрим вектор $\mathbf{r} = ( x\_1, y\_1, z\_1 \ldots, x\_N, y\_N, z\_N )^T$, составленный из координат точек колес, находящихся в контакте с опорной плоскостью $C\_i$ в неподвижной системе отсчета $OXYZ$.

Матрица оператора $\A$ связей\upr{eq:constraints\_vec} может быть получена, в частности, как якобиан зависимости вектора $\mathbf{r}$ от обобщенных координат $\q$: $\A(\q) = \ddfrac{\partial \mathbf{r}(\q)}{\partial \q}\bigg|\_{x,y}$.

Непосредственный подсчет показывает, что столбцы якобиана, соответствующие оси $OZ$, оказываются нулевыми, и потому их следует исключить.

При этом матрица $\A^T$ в точности совпадает с матрицей $\mK$ из~раздела~\ref{sect:impact\_classical}, и таким образом, множители Лагранжа $\lagr$ оказываются компонентами вектора реакций $\F$.

\subsection{Изменение кинетической энергии}

Выясним, как меняется кинетическая энергия при смене ролика в контакте:

$$

2\Delta\ke = 2\left(\ke^+ - \ke^-\right) = \dotp{\mke\dqposle}{\dqposle} - \dotp{\mke\dqdo}{\dqdo} =

$$

$$

= \dotp{\mke\deltadq}{\deltadq} + 2\dotp{\mke\dqdo}{\deltadq} = -\dotp{\mke\deltadq}{\deltadq} + 2\dotp{\mke\dqposle}{\deltadq}

$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу идеальности связей\upr{eq:constraints\_ideal} и основного уравнения удара\upr{eq:udar\_general}, т.е. равенства нулю мощности ударных импульсов на перемещениях, допускаемых связями

$$\logicWorkZero.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии системы равна энергии потерянных скоростей $\deltadq = \dqposle - \dqdo$:

\begin{equation\*}

\eqDeltaT,

\end{equation\*}

что соответствует теореме Карно \cite{Vilke}.

\section{Примеры движений}

Рассмотрим результаты расчетов для трех вариантов начальных условий.

\begin{enumerate}[wide]

\item \label{sol:self\_rot} Вращение вокруг своей оси ($\nu\_1(0) = \nu\_2(0) = 0, \nu\_3(0) = 1$) (фиг.~\ref{fig:self\_rot}).

\item \label{sol:straight} Движение по прямой в направлении оси $S\xi$ ($\nu\_1(0) = 1, \nu\_2(0) = \nu\_3(0) = 0$) (фиг.~\ref{fig:straight}).

\item \label{sol:wrench} Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu\_1(0) = 1, \nu\_2(0) = 0, \nu\_3(0) = 1$) (фиг.~\ref{fig:wrench}).

\end{enumerate}

Такие же варианты рассмотрены в \cite{ZobovaGerasimovPMM} при интегрировании уравнений движения на гладких участках с упрощенной моделью изменения обобщенных скоростей при смене контакта.

Расчеты выполнены для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha\_i = \frac{2\pi}{N}(i - 1), N = 3$) с $n = 5$ роликами на колесе. Все величины безразмерны, так что радиусы платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика $1$, $0.15$ и $0.05$. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$.

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной.

В вариантах \ref{sol:self\_rot} и \ref{sol:straight} заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

В случае \ref{sol:self\_rot} вращения вокруг вертикали угловая скорость платформы $\nu\_3$ в среднем медленно убывает (немонотонно): уменьшается на 5\% за первые $10^3$с. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. Центр масс покоится. На фиг.~\ref{fig:self\_rot} приведены скорости собственного вращения роликов на первом колесе $\dot{\phi}\_{1j}$. Находящийся в контакте ролик неподвижен относительно колеса (в силу связи со скоростью центра масс, см. (\ref{constraint\_roller\_contact}) при $\nu\_1 = \nu\_2 = 0$, чему соответствуют участки графиков, лежащие на оси абсцисс. Когда контакт этого ролика с опорной плоскостью прекращается, он начинает вращаться за счёт вращения экипажа в целом вокруг вертикальной оси (см. первый интеграл (\ref{int\_free\_roller}), существующий на гладких участках). После полного оборота колеса ролик приобретает некоторую скорость вращения, которую мгновенно теряет при следующем входе в контакт. В результате вся система теряет часть энергии, испытывая удар связями непроскальзывания. Скорость $\nu\_3$ вращения экипажа вокруг вертикальной оси при этом изменяется скачком (см. например $t=1, 3, 5, 7.5$c на графиках).

При поступательном движении экипажа (вариант \ref{sol:straight}) угловая скорость тождественно равна нулю. Зависимости скорости центра масс экипажа $v = \sqrt{\nu\_1^2+\nu\_2^2}$ и кинетической энергии $T$ от времени показаны на фиг.~\ref{fig:straight}. Обе величины убывают (энергия -- монотонно, скачками, с каждой сменой контакта; скорость центра масс -- в среднем). Переднее колесо не вращается вокруг своей оси и движется с опорой на один и тот же ролик. Скорость вращения этого ролика связана со скоростью центра масс согласно связи (\ref{constraint\_roller\_contact}). Остальные ролики переднего колеса покоятся относительно экипажа. На задних колесах все ролики раскручиваются, скорости вращения показаны на фиг.~\ref{fig:straight\_100\_nus2}. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным.

При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай \ref{sol:wrench}), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига.

Угловая скорость экипажа $\nu\_3$ растет и достигает максимума (фиг.~\ref{fig:wrench\_1000\_nu3}) в момент $t^\*\_1 \approx 150$c, после чего почти монотонно убывает (с точностью до влияния первых интегралов (\ref{int\_free\_roller})), скорость центра $S$ экипажа $v$ становится исчезающе малой к моменту $t^\*\_2 \approx 300$с (фиг.~\ref{fig:wrench\_1000\_v}), а кинетическая энергия (фиг.~\ref{fig:wrench\_1000\_kin\_en}) убывает при каждой смене контакта. Центр платформы $S$ описывает спираль (фиг.~\ref{fig:wrench\_1000\_traj}). После почти полной остановки центра масс при $t > t^\*\_2$ экипаж вращается вокруг вертикальной оси $Sz$, постепенно замедляясь. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг.~\ref{fig:wrench\_1000\_nus1}).

\newpage

\subsection{Вокруг своей оси}

\begin{figure}[h]

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/kin\_en.eps}

\caption{Кинетическая энергия}

\label{fig:self\_rot\_25\_kin\_en}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/nu3.eps}

\caption{Угловая скорость экипажа}

\label{fig:self\_rot\_25\_nu3}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/rol\_vel.eps}

\caption{Угловые скорости роликов}

\label{fig:self\_rot\_25\_rol\_vel}

}

\newline

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/chi.eps}

\caption{Углы поворота колес}

\label{fig:self\_rot\_25\_chi}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/theta.eps}

\caption{Угол поворота экипажа}

\label{fig:self\_rot\_25\_theta}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/self\_rot\_25/rol\_ang.eps}

\caption{Углы поворота роликов}

\label{fig:self\_rot\_25\_rol\_ang}

}

\caption{Вращение экипажа вокруг своей оси}

\end{figure}

\label{fig:self\_rot}

\newpage

\subsection{По прямой}

\begin{figure}[h]

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/kin\_en.eps}

\caption{Кинетическая энергия}

\label{fig:straight\_100\_kin\_en}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/v.eps}

\caption{Скорость центра масс}

\label{fig:straight\_100\_v}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/nus2.eps}

\caption{Угловые скорости роликов на заднем колесе}

\label{fig:straight\_100\_nus2}

}

\newline

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/nu3.eps}

\caption{Угловая скорость экипажа}

\label{fig:straight\_100\_nu3}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/traj.eps}

\caption{Траектория}

\label{fig:straight\_100\_traj}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/nus1.eps}

\caption{Угловые скорости роликов на переднем колесе}

\label{fig:straight\_100\_nus1}

}

\newline

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/xy.eps}

\caption{Координаты центра масс}

\label{fig:straight\_100\_xy}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/phi1.eps}

\caption{Углы поворота роликов на переднем колесе}

\label{fig:straight\_100\_phi1}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/straight\_100/phi2.eps}

\caption{Углы поворота роликов на заднем колесе}

\label{fig:straight\_100\_phi2}

}

\caption{Движение экипажа по прямой}

\end{figure}

\label{fig:straight}

\newpage

\subsection{С закруткой}

\begin{figure}[h]

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/kin\_en.eps}

\caption{Кинетическая энергия}

\label{fig:wrench\_1000\_kin\_en}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/v.eps}

\caption{Скорость центра масс}

\label{fig:wrench\_1000\_v}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.3\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/nu3.eps}

\caption{Угловая скорость экипажа}

\label{fig:wrench\_1000\_nu3}

}

\newline

\subf{0.45\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/traj.eps}

\caption{Траектория центра масс}

\label{fig:wrench\_1000\_traj}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.45\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/theta.eps}

\caption{Угол поворота экипажа}

\label{fig:wrench\_1000\_theta}

}

\newline

\subf{0.45\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/nus1.eps}

\caption{Угловые скорости роликов на переднем колесе}

\label{fig:wrench\_1000\_nus1}

}

\hspace{10pt}

\subf{0.45\textwidth}{

\centering

\includegraphics[scale=0.33]{pic/wrench\_1000/phi1.eps}

\caption{Углы поворота роликов на переднем колесе}

\label{fig:wrench\_1000\_phi1}

}

\caption{Движение экипажа с закруткой}

\end{figure}

\label{fig:wrench}

\section{Выводы}

В ходе работы построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте, в предположении о мгновенном выполнении условия отсутствия проскальзывания между роликом и опорной плоскостью. Смена контакта рассмотрена с точки зрения классической механики, и приведено обоснование разрешимости задачи теории удара при мгновенном наложении дифференциальных связей на натуральную систему. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа с омни-колесами с учетом ударного взаимодействия роликов и опорной плоскости.

\bibliographystyle{./BibTeX-Styles/utf8gost705u} \begin{thebibliography}{10}

\def\selectlanguageifdefined#1{

\expandafter\ifx\csname date#1\endcsname\relax

\else\language\csname l@#1\endcsname\fi}

\ifx\undefined\url\def\url#1{{\small #1}}\else\fi

\ifx\undefined\BibUrl\def\BibUrl#1{\url{#1}}\else\fi

\ifx\undefined\BibAnnote\long\def\BibAnnote#1{(#1)}\else\fi

\ifx\undefined\BibEmph\def\BibEmph#1{\emph{#1}}\else\fi

\bibitem{ZobovaTatarinovPMM}

\selectlanguageifdefined{russian}

Зобова~А.~А., Татаринов~Я.~В. Динамика

экипажа с роликонесущими колесами~// ПММ.

2009.

\newblock 2009.

\newblock Т.~73, {№}~1.

\newblock {С.}~13--22.{}

\bibitem{formalskii}

\selectlanguageifdefined{russian}

Мартыненко~Ю.~Г., Формальский~А.~М. О

движении мобильного робота с

роликонесущими колесами~// Изв. РАН. Теория

сист. управл. 2007.

\newblock 2007.

\newblock {№}~6.

\newblock {С.}~142--149.{}

\bibitem{borisov}

\selectlanguageifdefined{russian}

Борисов~А.~В., Килин~А.~А., Мамаев~И.~С. Тележка

с омниколесами на плоскости и сфере~//

Нелин. дин. 2011.

\newblock 2011.

\newblock Т.~7., {№}~4 (Мобильные роботы).

\newblock {С.}~785--801.{}

\bibitem{ZobovaTatarinovAspecty2006}

\selectlanguageifdefined{russian}

Зобова~А.~А., Татаринов~Я.~В. Математические

аспекты динамики движения экипажа с тремя

окольцованными колесами~// Мобильные

роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во

МГУ, 2006.

\newblock 2006.

\newblock {С.}~61–67.{}

\bibitem{zobova2008svobodnye8020851}

\selectlanguageifdefined{russian}

Зобова~А.~А., Татаринов~Я.~В. Свободные и

управляемые движения некоторой модели

экипажа с роликонесущими колесами~//

Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2008.

\newblock 2008.

\newblock {№}~6.

\newblock {С.}~62--65.{}

\bibitem{Martynenko2010}

\selectlanguageifdefined{russian}

Мартыненко~Ю.~Г. Устойчивость стационарных

движений мобильного робота с

роликонесущими колесами и смещенным

центром маcc~// ПММ. 2010.

\newblock 2010.

\newblock Т.~74, {№}~4.

\newblock {С.}~610--619.{}

\bibitem{KosenkoGerasimov}

\selectlanguageifdefined{russian}

Косенко~И.~И., Герасимов~К.~В.

Физически-ориентированное моделирование

динамики омнитележки~// Нелин. дин. 2016.

\newblock 2016.

\newblock Т.~12, {№}~2.

\newblock {С.}~251--262.{}

\bibitem{Tobolar}

\selectlanguageifdefined{russian}

Tobolar~J., Herrmann~F., Bunte~T. Object-oriented modelling and control of

vehicles with omni-directional wheels~// Computational Mechanics. 2009.

\newblock Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009.{}

\bibitem{Williams2002}

\selectlanguageifdefined{russian}

Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots~/ R.L.~Williams,

B.E.~Carter, P.~Gallina {[и~др.]}~// {IEEE} Transactions on Robotics and

Automation. 2002.

\newblock 2002.

\newblock Т.~18, {№}~3.

\newblock {С.}~285--293.{}

\bibitem{Ashmore2002}

\selectlanguageifdefined{russian}

Ashmore~M., Barnes~N. Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path

between two points is not a straight-line~// Lecture Notes in Computer

Science.

\newblock Springer Berlin Heidelberg, 2002.

\newblock {С.}~225--236.{}

\bibitem{ZobovaGerasimovPMM}

\selectlanguageifdefined{russian}

Герасимов~К.~В., Зобова~А.~А. Движение

симметричного экипажа на омни-колесах с

массивными роликами~// ПММ. 2018.

\newblock 2018.

\newblock Т.~82, {№}~4.

\newblock {С.}~гот. к публ.{}

\bibitem{Tatarinov}

\selectlanguageifdefined{russian}

Татаринов~Я.~В. Уравнения классической

механики в новой форме~// Вестник Моск.

ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003.

\newblock 2003.

\newblock {№}~3.

\newblock {С.}~67–76.{}

\bibitem{Zobova2011}

\selectlanguageifdefined{russian}

Зобова~А.~А. Применение лаконичных форм

уравнений движения в динамике

неголономных мобильных роботов~// Нелин.

дин. 2011. Т.~7. №~4. P.~771--783.

\newblock 2011.{}

\bibitem{Vilke}

\selectlanguageifdefined{russian}

Вильке~В.Г. Теоретическая механика.

\newblock СПб.: Лань, 2003.{}

\bibitem{KarapetyanKugushev}

\selectlanguageifdefined{russian}

Теоретическая механика~/ С.~В.~Болотин,

А.~В.~Карапетян, Е.~И.~Кугушев {[и~др.]}.

\newblock М.: Академия, 2010.

\newblock 432~{с.}{}

\end{thebibliography}

%

\section{Приложение}

Покажем невырожденность матрицы $(\mke\cstr; -\A^T)$ основного уравнения удара\upr{eq:udar\_mat\_At}.

С одной стороны, каждая из систем столбцов $\{\cstr\_{\cdot i}\}$ и $\{\A^T\_{\cdot j}\}$ линейно-независима,

а с другой, эти две системы взаимно ортогональны\upr{eq:constraints\_orth}.

Поскольку матрица $\mke$ положительно определена, ее действие на $\cstr$ не нарушает линейной независимости системы столбцов в целом.

Последнее можно показать это можно от противного.

Предположим существование таких чисел $x\_i$ и $y\_j$, не равных нулю одновременно, что $\sum\_i x\_i \mke \cstr\_{\cdot i} + \sum\_j y\_j \J^T\_{\cdot j} = 0$.

Домножим это равенство скалярно на каждый из столбцов $\{\cstr\_{\cdot \alpha}\}$ и рассмотрим сумму полученных выражений: $\sum\_{\alpha, i} x\_i \cstr\_{\cdot \alpha}^T \mke \cstr\_{\cdot i} + \sum\_{\alpha, j} y\_j \cstr\_{\cdot \alpha}^T \mke \J^T\_{\cdot j} = \cstr^T \mke \cstr \mathbf{x} + \cstr^T\J^T\mathbf{y}$.

Последнее слагаемое здесь равно нулю в силу\upr{eq:constraints\_orth},

а первое отлично от нуля, поскольку матрица $\cstr^T \mke \cstr$ является матрицей Грама линейно-независимой системы столбцов $\{\cstr\_{\cdot i}\}$ в метрике $\mke$, а значит, невырожденна.

Таким образом, все выражение не может быть равным нулю.

Полученное противоречие завершает доказательство.